

УДК 519.63

ИЗОБРАЖЕНИЕ И АНАЛИЗ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ФАЗОВЫХ ПЛОСКОСТЯХ

В.П. Зимин

Томский политехнический университет

E-mail: zimmin@ido.tpu.ru

Предложен новый метод изображения и анализа граничных условий краевой задачи теплопроводности на фазовых плоскостях температура – градиент температуры и температура – плотность теплового потока. Проанализированы особенности всех видов (родов) линейных граничных условий на данных плоскостях. Исследовано поведение на фазовых плоскостях нелинейных граничных условий для двух задач. Проведено сравнение экспериментальных и модельных результатов задачи распределения температуры электронов в низкотемпературной плазме термоэмиссионного преобразователя.

Ключевые слова:

Граничные условия, уравнение теплопроводности, фазовая плоскость, низкотемпературная плазма, термоэмиссионный преобразователь энергии.

Key words:

Boundary condition, heat conduction equation, phase plane, low-temperature plasma, thermionic converter.

Введение

Для моделирования реальных процессов наиболее часто используются уравнения математической физики (уравнения в частных производных). Прежде всего – это уравнения второго порядка: параболического, гиперболического и эллиптического типов, которые описывают соответственно процессы теплопроводности (диффузии), распространение волн и стационарное распределение различных физических величин. Моделирование сложных процессов требует использование системы таких уравнений и приводит к мультифизическим постановкам задач. Для корректной математической постановки задач, использующей эти уравнения, задаются краевые условия: набор граничных и начальных условий; последние необходимы для решения эволюционных задач.

Анализ решения краевой задачи теплопроводности с тривиальными (однородными) и линейными граничными условиями не представляет особого труда. Он значительно усложняется, если граничные условия нелинейные [1] или заданы в виде некоторых уравнений баланса [2, 3]. В этих случаях необходимо проводить дополнительный анализ граничных условий. Так как граничные условия в общем виде можно представить как функцию от искомых величин и их производных, то для такого анализа предлагается использовать фазовые плоскости температура – градиент температуры ($T, \partial T / \partial x$) и температура – плотность теплового потока (T, q). В физической интерпретации координатами последней плоскости являются обобщенные потенциал и поток [4].

Ранее фазовая плоскость плотность плазмы – плотность ионного тока использовалась для анализа стационарного уравнения диффузии плотности плазмы и нелинейных граничных условий. В [5] получено точное уравнение горения дугового разряда в Cs, а в [6] эта плоскость использовалась для построения алгоритма численного решения нелинейной краевой задачи.

В данной статье развивается метод изображения и анализа на фазовых плоскостях как линейных, так и нелинейных граничных условий для одномерного уравнения теплопроводности.

Изображение и анализ линейных граничных условий на фазовых плоскостях

Для уравнения теплопроводности имеются четыре вида (рода) граничных условий [7]. Выберем для отображения температуры абсолютную шкалу. Такой выбор шкалы позволяет рассматривать только правую полуплоскость фазовой плоскости ($T, \partial T / \partial x$).

Если для граничного условия I рода температура поверхности тела T на границе ($x=x_0$) в течение теплообмена не меняется, то

$$T(t, x=x_0) = T_0 = \text{const.}$$

На фазовой плоскости это условие изображается в виде вертикальной прямой (рис. 1, линия 1). В общем случае $T_0 = T_0(t)$ вертикальная прямая будет параллельно перемещаться с течением времени.

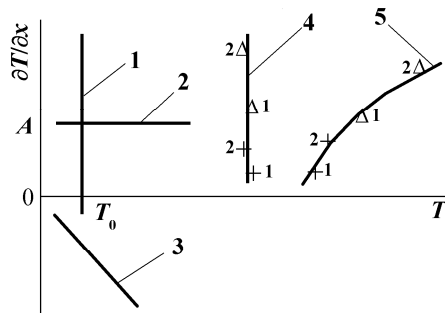


Рис. 1. Изображение на фазовой плоскости ($T, \partial T / \partial x$) линейных граничных условий: 1) I; 2) II; 3) III; 4, 5) IV рода

Запишем граничное условие II рода с учетом закона Фурье для постоянной плотности теплового потока q_0

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_0} = -\frac{q_0}{\lambda} = A = \text{const.},$$

где λ – коэффициент теплопроводности. На фазовой плоскости данное граничное условие изображается в виде горизонтальной линии 2 (рис. 1).

Граничное условие III рода с учетом закона Ньютона имеет вид

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \pm \alpha (T - T_c),$$

где α – коэффициент теплообмена; T_c – температура среды. Знак плюс берется в случае охлаждения тела ($T > T_c$), минус – его нагрева ($T_c > T$). Данное граничное условие представляется в виде прямой, которая может иметь различный коэффициент наклона (рис. 1, линия 3).

На границе двух сред с различными коэффициентами теплопроводности ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) и равными температурами $T_1 = T_2$ ставиться граничное условие IV рода

$$-\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x=x_0} = -\lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{x=x_0}.$$

Представление данного граничного условия на фазовой плоскости дано на рис. 1, линия 4. Это вертикальная линия, на которой производная температуры по пространственной переменной имеет разрыв, т. к. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Причем этот разрыв увеличивается при возрастании по абсолютной величине этой производной. На рис. 1 (линия 4) это обстоятельство показано в виде символа «+» для меньших производных температуры и символа «Δ» – для больших. Цифры у символов означают индекс у переменной T .

В принципе могут возникать скачки не только для пространственной производной температуры, но и для самой температуры $T_1 \neq T_2$. Например, когда между двумя телами имеется тонкий слой воздушной или иной среды. Граничное условие IV рода на фазовой плоскости будет представляться в виде кривой 5 (рис. 1).

При анализе и решении краевых задач теплопроводности удобно отображать граничные условия не только на плоскости $(T, \partial T / \partial x)$, но и на фазовой плоскости температура – поток тепловой энергии (T, q) . Изображение граничного условия I рода на плоскости (T, q) аналогично его изображению на плоскости $(T, \partial T / \partial x)$. Изображение граничного условия II рода на плоскости (T, q) меняет знак, по сравнению с изображением на плоскости $(T, \partial T / \partial x)$, а изображение граничного условия III рода – знак и величину наклона прямой. Изображение граничного условия IV рода на плоскости (T, q) для переменной q будет непрерывным.

С помощью представления граничных условий на фазовых плоскостях удобно анализировать область допустимых решений краевой задачи. Например, если для краевой задачи на границах отрезка задаются условия I рода, то область допустимых решений на фазовой плоскости вертикальная полоса, а для условия II рода – горизонтальная полоса. Накладывая ограничения на изменение производной температуры в первом случае и на из-

менение температуры во втором, получим область допустимых решений в виде прямоугольника. Рассуждая аналогичным образом, получим область допустимых решений задачи для граничных условий III рода в виде некоторого сектора.

Построение и визуализация области допустимых решений краевой задачи на фазовых плоскостях является важным при создании численных алгоритмов решения краевых задач. Такой анализ необходим, когда дифференциальный оператор краевой задачи имеет особые точки типа седла [5].

Изображение и анализ нелинейных граничных условий на фазовых плоскостях

Для нелинейных граничных условий I и II рода можно обобщить изображение и анализ на фазовых плоскостях. Такие граничные условия содержат только нелинейные зависимости (заданные явным или неявным образом) соответственно от температуры или от её пространственной производной. Вид этих граничных условий на плоскости $(T, \partial T / \partial x)$ остается таким же, как и в линейном случае (рис. 1, линии 1, 2), но появляются дополнительные математические ограничения на область допустимых решений нелинейных уравнений.

Нелинейные граничные условия III и IV рода необходимо анализировать и визуализировать для каждой конкретной задачи. Рассмотрим две такие задачи. Первая связана с математическим моделированием температурных полей кабельных изделий при их вулканизации [1], вторая – с моделированием процессов в низкотемпературной цезиевой плазме термоэмиссионного преобразователя энергии (ТЭП) [2–6].

Наложение изоляции (оболочки) кабеля, имеющего медную жилу, сухим методом происходит в вулканизационных печах. Краевая задача теплопроводности в одномерной цилиндрической геометрии имеет граничные условия II, III и IV рода:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=r_0} &= 0, \\ q_2 &= -\lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=r_2} = \alpha (T_2 - T_B) + \sigma \varepsilon_{\text{np}} (T_2^4 - T_B^4), \\ -\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=r_1} &= -\lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=r_1}, \end{aligned}$$

где r – радиус изделия; $r_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $r_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м – радиусы жилы и оболочки; T_1, T_2 – температуры жилы и оболочки; $T_B = 500$ К – температура вулканизационной печи; $\lambda_1 = 400$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 0,16$ Вт/(м·К) – коэффициенты теплопроводности медной жилы и оболочки; $\alpha = 1$ Вт/(м²·К) – коэффициент теплообмена с окружающей средой; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана – Больцмана, $\varepsilon_{\text{np}} = 0,5$ – приведенная степень черноты.

На рис. 2 представлены изображения нелинейных граничных условий задачи на плоскостях $(T, \partial T / \partial x)$ и (T, q) . Анализ рис. 2, а, показывает, что учет нелинейного члена излучения приводит к рос-

ту градиента температуры на порядок, практически во всем диапазоне температур 293...500 К.

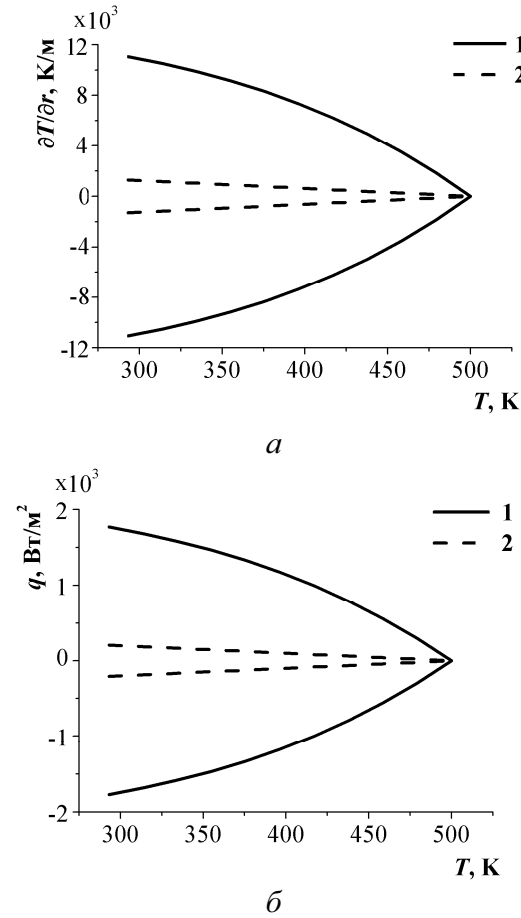


Рис. 2. Изображение нелинейных граничных условий задачи вулканизации кабеля на фазовой плоскости: а – $(T, \partial T / \partial x)$; б – (T, q) ; 1, 2) теплообмен с учетом и без учета излучения

Медная жила имеет значительный коэффициент теплопроводности и небольшой диаметр, поэтому градиент температуры в ней будет минимальным. На фазовой плоскости $(T, \partial T / \partial x)$ распределение температур в жиле будет представлять собой небольшой отрезок вертикальной прямой, расположенный вблизи оси абсцисс. Большое различие в коэффициентах теплопроводности жилы и оболочки $\lambda_1 / \lambda_2 = 2,5 \cdot 10^3$ вызывает значительный температурный градиент в оболочке. Граничное условие IV рода приводит к разрыву производной на вертикальной прямой, пропорциональному λ_1 / λ_2 . Процессы полимеризации в тонкой оболочке слабо влияют на её температурное поле [1], поэтому рост температуры близок к линейному закону, а градиент температуры практически равен постоянной величине.

На фазовой плоскости $(T, \partial T / \partial x)$ распределение температур в оболочке будет представлять собой отрезок горизонтальной прямой, расположенный вблизи нелинейного граничного условия. Численное решение задачи распределения температуры в жиле и в оболочке [1] позволяет вычислить гра-

диент температуры в оболочке. Он приблизительно равен 10^4 К/м. Поэтому для $T_1 = 324$ К градиент температуры в жиле будет равен $10^4 / (\lambda_1 / \lambda_2) = 4$ К/м. Фактически, решение задачи на плоскости $(T, \partial T / \partial x)$ находится на оси абсцисс и на кривых граничных условий. На плоскости (T, q) (рис. 2, б) это решение будет непрерывным, представляющим практически вертикальную линию, проходящую через точку на оси абсцисс с координатой $T_1 = 324$ К.

Плотность потока кинетической энергии у эмиттера q_{e0} и коллектора q_{ed} ТЭП имеют различные выражения в зависимости от полярности приэлектродных потенциальных барьеров [5]:

$x = 0, V_E \leq 0,$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{eV_E}{kT_{e0}}\right)\right) q_{e0} = J_{Ee} \left(\frac{2kT_E}{e} - \frac{2kT_{e0}}{e}\right) + J_{e0} \left(1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{eV_E}{kT_{e0}}\right)\right) \left(\frac{2kT_{e0}}{e} - V_E\right), \quad (1)$$

$x = 0, V_E \geq 0,$

$$\frac{1}{2} q_{e0} = \left(J_{Ee} \exp\left(\frac{eV_E}{kT_{e0}}\right) - \frac{1}{2} J_{e0}\right) \times \left(\frac{2kT_E}{e} - \frac{2kT_{e0}}{e}\right) + J_{e0} \frac{2kT_E}{e}, \quad (2)$$

$x = d, V_C \geq 0,$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-eV_C}{kT_{ed}}\right)\right) q_{ed} = J_{Ce} \left(\frac{2kT_{ed}}{e} - \frac{2kT_C}{e}\right) + J_{ed} \left(1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-eV_C}{kT_{ed}}\right)\right) \left(\frac{2kT_{ed}}{e} + V_C\right), \quad (3)$$

$x = d, V_C \leq 0,$

$$\frac{1}{2} q_{ed} = \left(J_{Ce} \exp\left(\frac{eV_C}{kT_C}\right) + \frac{1}{2} J_{ed}\right) \times \left(\frac{2kT_{ed}}{e} - \frac{2kT_C}{e}\right) + J_{ed} \frac{2kT_C}{e}, \quad (4)$$

где e, k – заряд электрона и постоянная Больцмана; J_{Ee}, J_{Ce} – плотность эмиссионного электронного тока с эмиттера и коллектора; J_{e0}, J_{ed} – плотность электронного тока у эмиттера ($x=0$) и у коллектора ($x=d$); d – межэлектродный зазор; T_{e0}, T_{ed} – температуры электронов в приэлектродных областях; V_E, V_C – приэлектродный потенциальный барьер у эмиттера и коллектора. Потенциальный приэлектродный барьер (V_E или V_C) считается ускоряющим (<0) или тормозящим (>0), если он ускоряет (или тормозит) электроны, идущие от эмиттера к коллектору.

Выражение стационарной плотности потока кинетической энергии электронов в плазме учитывает конвективную составляющую

$$q_e = -\lambda_e \frac{dT_e}{dx} + 2J_e \frac{kT_e}{e}, \quad (5)$$

где T_e – температура электронов плазмы; $\lambda_e = 2knD_e$ – коэффициент теплопроводности электронного газа; n – плотность плазмы; D_e – коэффициент диффузии электронов в плазме.

В дуговом режиме работы ТЭП, когда в межэлектродном зазоре реализуется потенциальная яма для электронов ($V_E < 0$ и $V_C > 0$), экспериментальными методами получают распределения по зазору плотности плазмы $n=n(x)$, температуры электронов $T_e=T_e(x)$ и потенциала пространства, занятого плазмой $V=V(x)$ [2, 3]. С помощью фазовых плоскостей $(T, \partial T/\partial x)$ и (T_e, q_e) можно провести сравнение экспериментальных [3. С. 332] и модельных распределений параметров плазмы. Последние получаем из граничных условий (1–4)

и выражений для $\frac{dT_e}{dx} \Big|_{x=0}$, $\frac{dT_e}{dx} \Big|_{x=d}$, полученных из

(5), в заданном диапазоне изменения температуры электронов у электродов ТЭП.

Такое сравнение проводилось для параметров ТЭП и плазмы: температура эмиттера $T_E=1830$ К, коллектора – $T_C=840$ К, давления паров цезия $p_{Cs}=266,2$ Па, $d=0,06$ см, работа выхода электрона из эмиттера $F_E=3,086$ эВ, коллектора – $F_C=1,448$ эВ. Эмиссионная плотность тока с эмиттера $J_E=1,28$ А/см², с коллектора – $J_C=0,1$ А/см². Сечения столкновения электрон-атом принималось равным $\sigma_{ea}=3,5 \cdot 10^{-14}$ см²,

электрон-ион – $\sigma_{ei} = \frac{3,9 \cdot 10^{-6} \Lambda}{T_e^2}$ см², Λ – кулонов-

ский логарифм.

На рис. 3 представлены экспериментальные и модельные параметры плазмы для плотности тока через ТЭП $J=1$ А/см², $V_E=-0,667$ В, $V_C=0,188$ В. Полагается, что $J_{e0}=J_{ed}=J$. Экспериментальная температура электронов $T_{e0}=T_{ed}(x)$ (рис. 3, а, кривая 3) монотонно уменьшается от эмиттера к коллектору, причем градиент температуры электронов у эмиттера меньше, чем у коллектора. В модели градиент температуры электронов также отрицательный (рис. 3, а, кривые 1, 2), но намного больше (по абсолютной величине), чем в эксперименте. Количественное сравнение этих результатов дает следующее:

- у эмиттера –

$$\frac{dT_{e0}}{dx} \Big|_{x=0} = -6400 \text{ К/см и } \frac{dT_{eM}}{dx} \Big|_{x=0} = -44048 \text{ К/см;}$$

- у коллектора –

$$\frac{dT_{e0}}{dx} \Big|_{x=d} = -13400 \text{ К/см и } \frac{dT_{eM}}{dx} \Big|_{x=d} = -51790 \text{ К/см.}$$

Восстановленная с помощью экспериментальной зависимости $T_{e0}=T_{e0}(x)$ и (5) плотность кинетической энергии электронов в плазме на плоскости (T_e, q_e) имеет немонотонный вид, с изломом (рис. 3, б, кривая 3). Количественное сравнение восстановленных с помощью эксперимента и мо-

дельных данных дает следующие результаты, у эмиттера: $q_{e0}|_{x=0}=0,53$ Вт/см² и $q_{eM}|_{x=0}=0,94$ Вт/см²; у коллектора: $q_{e0}|_{x=d}=0,42$ Вт/см² и $q_{eM}|_{x=d}=0,58$ Вт/см².

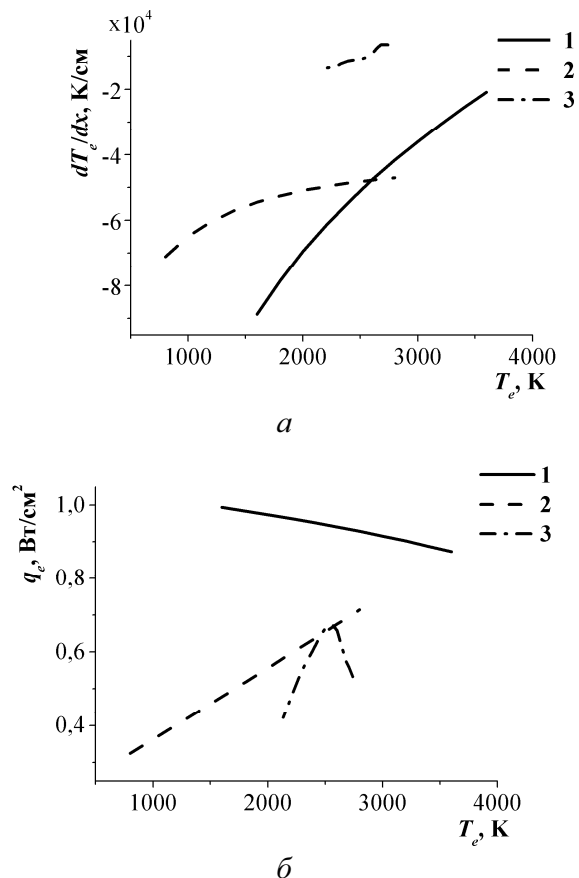


Рис. 3. Распределение параметров низкотемпературной плазмы ТЭП на фазовой плоскости: а – $(T_e, \partial T_e/\partial x)$; б – (T_e, q_e) ; 1, 2) модельные параметры у эмиттера и коллектора; 3) экспериментальные параметры плазмы

Таким образом, качественное и количественное сравнение экспериментальных и модельных результатов показывает, что они существенно отличаются друг от друга. Варьирование параметров плазмы в пределах 20 % от экспериментальных значений не позволяет добиться удовлетворительного согласия. Основное различие результатов заключается в малости градиента экспериментальной температуры электронов у эмиттера. Градиент температуры электронов у эмиттера должен быть не меньше, чем у коллектора. Оценки температуры электронов у эмиттера существенно отличаются у разных авторов. Например, в [3] из анализа уравнения горения дуги получена температура электронов у эмиттера $T_{e0}=2520$ К, а в [8], где оценка получена на основе анализа экспериментальных вольтамперных характеристиках ТЭП, $T_{e0R}=4640$ К. Для последней оценки получаем градиент температуры электронов в зазоре $dT_e/dx \approx (T_{ed0} - T_{e0R})/d = (2133 - 4640)/0,06 = -41783$ К/см. Это близко к значению градиента температуры элект-

тронов в модели $\frac{dT_{eM}}{dx} \Big|_{x=0}$, приведенному выше.

Вопрос о различии в поведении экспериментальных и теоретических температур электронов требует дальнейшего изучения с точки зрения применимости существующих моделей плазмы в ТЭП.

Выводы

1. Предложен новый метод изображения и анализа граничных условий уравнения теплопроводности, заключающийся в использовании фазовых плоскостей температура — градиент температуры и температура — плотность теплового потока.
2. Проанализировано представление на фазовых плоскостях линейных граничных условий всех четырех родов. Особенности представления

на фазовых плоскостях нелинейных граничных условий III и IV родов проанализированы для двух задач. Первая — моделирование в цилиндрической системе координат температурных полей кабельных изделий при их вулканизации. Вторая — моделирование в декартовой системе координат процессов в низкотемпературной цезиевой плазме термоэмиссионного преобразователя энергии.

3. Для задачи с использованием фазовых плоскостей проведено сравнение экспериментальных и модельных параметров плазмы, которое показало существенное отличие градиента температуры электронов у эмиттера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов Г.В., Иванова Е.В. Математическое моделирование температурных полей в процессе вулканизации типичных кабельных изделий // Известия Томского политехнического университета. — 2010. — Т. 316. — № 4. — С. 38–41.
2. Бакшт Ф.Г., Дюжев Г.А., Марциновский А.М. и др. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма / под ред. Б.Я. Мойжеса и Г.Е. Пикуса. — М.: Наука, 1973. — 480 с.
3. Стаханов И.П., Пашенко В.П., Степанов А.С., Гуськов Ю.К. Физические основы термоэмиссионного преобразования энергии / под ред. И.П. Стаханова. — М.: Атомиздат, 1973. — 374 с.
4. Зимин В.П. Метод исследования модели низкотемпературной плазмы ТЭП // Вычислительные технологии и математические модели в науке, технике и образовании: Труды Междунар. конф. — Алма-Ата, 2002. — С. 70–73.
5. Зимин В.П. Алгоритм расчета вольт-амперных характеристик термоэмиссионного преобразователя с постоянной температурой электронов / Ред. журн. «Известия вузов. Физика». — Томск, 1984. — № 7. — 36 с. — Деп. в ВИНТИ 21.03.1984, № 1571–84.
6. Зимин В.П. Исследование функций для управляющего параметра краевой задачи диффузии плотности плазмы // Известия Томского политехнического университета. — 2008. — Т. 313. — № 4. — С. 86–92.
7. Лыков А.В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 599 с.
8. Rasor N.S. Analytical description of cesium diode phenomenology // Report on Inter. Conf. on Thermionic Power Generation. — London, 1965. — P. 37–48.

Поступила 25.01.2011 г.